# CAPITOLO 5

# Convoluzione e Regolarizzazione per convoluzione

Il risultato principale di questo capitolo è il Teorema di densità 5.4.1.

## 5.1 Convoluzione e Regolarizzazione per convoluzione

Ricordiamo che uno spazio topologico $X$ si dice (spazio) normale se è $T_1$ (cioè se ogni punto è un chiuso) e

$$\forall F_1, F_2 \text{ chiusi, non vuoti, disgiunti} \quad \exists G_1, G_2 \text{ aperti, disgiunti} \ : \quad F_1 \subset G_1, \quad F_2 \subset G_2.$$

Osserviamo che ogni spazio metrico è (uno spazio) normale.

**Teorema 5.1.1.** *(Lemma di Urysohn)*
*Sia $X$ uno spazio normale. Comunque si prendano due chiusi, non vuoti, disgiunti, $F_1$ e $F_2$ di $X$, esiste $u_1 : X \to [0,1]$ continua tale che*

$$u_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in F_1 \\ \\ 0 & \text{se } x \in F_2. \end{cases}$$

**Lemma 5.1.2.** *$C_0^0(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^1(\mathbb{R}^N)$.*

*Dimostrazione.* Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e senza ledere la generalità, supponiamo $u \geq 0$. Esiste allora $(u_n)$ successione crescente di funzioni semplici, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq u$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, tale che

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} u \quad \text{q.o. in } \mathbb{R}^N$$

e per il teorema della convergenza dominata

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u \quad \text{in norma } L^1(\mathbb{R}^N).$$

È sufficiente allora provare la tesi per $\chi_E$ $\Big($funzione caratteristica di $E$ :

$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}\Big)$ con $E$ misurabile e limitato.
Si ha

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, F \text{ compatto e } G \text{ aperto limitato, } F \subset E \subset G \quad : \quad |G \setminus F| < \varepsilon.$$

Poiché $F$ e $\mathbb{R}^N \setminus G$ sono chiusi, non vuoti, disgiunti di $\mathbb{R}^N$ (spazio normale), dal lemma di Urysohn segue che esiste $u_1 : \mathbb{R}^N \to [0,1]$ continua tale che

$$u_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in F \\ \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus G, \end{cases}$$

anzi $u_1 \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ (giacché $supp\, u_1 \subset \overline{G}$). Risulta

$$\begin{aligned} \|\chi_E - u_1\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^N = F\cup(\mathbb{R}^N\setminus G)\cup(G\setminus F)} |\chi_E(x) - u_1(x)|\, d\mathcal{L}^N(x) \\ &= \int_{G\setminus F} |\chi_E(x) - u_1(x)|\, d\mathcal{L}^N(x) \\ &\le \int_{G\setminus F} d\mathcal{L}^N(x) = |G \setminus F| < \varepsilon\,. \quad \square \end{aligned}$$

**Definizione 5.1.3.** Sia $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ misurabile. Poniamo, per $a > 0$,

$$T_a u := (a \wedge u) \vee -a$$

(troncata di $u$ al livello $a$).

**Osservazione 5.1.4.** Sia $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \le p < +\infty$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ nulla fuori di un compatto di $\mathbb{R}^N$ tale che $\|v - u\|_p < \varepsilon$.

*Dimostrazione.* Sia $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \le p < +\infty$. Poniamo

$$u_n := T_n u \cdot \chi_{\overline{B}_n(0)} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ed è nulla fuori di $\overline{B}_n(0)$ (compatto). Risulta

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u \quad \text{q.o. in } \mathbb{R}^N$$

e $|u_n|^p \le |u|^p$. Per il teorema della convergenza dominata si ha

$$\|u_n - u\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

pertanto

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \ge \nu_\varepsilon \quad \|u_n - u\|_p < \varepsilon.$$

Basta dunque prendere $v = u_{\nu_\varepsilon}$. $\square$

**Lemma 5.1.5.** *$C_0^0(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < +\infty$.*

*Dimostrazione.* Sia $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 < p < +\infty$ (per $p = 1$ vedi il lemma precedente); per l'osservazione precedente, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, nulla fuori di un compatto e tale che $\|u - v\|_p < \varepsilon$. Tale $v \in L^1(\mathbb{R}^N)$, allora per il lemma precedente, fissato (arbitrariamente) $\delta > 0$ esiste $v_1 \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\|v - v_1\|_1 < \delta.$$

Si può assumere che $v_1$ sia tale che $\|v_1\|_\infty \leq \|v\|_\infty$ (altrimenti, se $\|v_1\|_\infty > \|v\|_\infty$, si prende $T_{\|v\|_\infty} v_1$).
Dalla disuguaglianza di Minkowski si ha:

$$\|u - v_1\|_p \leq \|u - v\|_p + \|v - v_1\|_p < \varepsilon + \|v - v_1\|_p .$$

Inoltre da

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v - v_1|^p \, d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\mathbb{R}^N} |v - v_1| \cdot |v - v_1|^{p-1} \, d\mathcal{L}^N(x)$$

si ha

$$\|v - v_1\|_p^p \leq \|v - v_1\|_1 \cdot \|v - v_1\|_\infty^{p-1}$$

e quindi

$$\|v - v_1\|_p \leq \|v - v_1\|_1^{\frac{1}{p}} \cdot \|v - v_1\|_\infty^{1-\frac{1}{p}} < \delta^{\frac{1}{p}} \left(2\|v\|_\infty\right)^{1-\frac{1}{p}} .$$

Scelto $\delta > 0$ sufficientemente piccolo tale che $\delta^{\frac{1}{p}} \left(2\|v\|_\infty\right)^{1-\frac{1}{p}} < \varepsilon$, si ha

$$\|v - v_1\|_p < \varepsilon,$$

pertanto

$$\|u - v_1\|_p < 2\varepsilon. \quad \square$$

**Osservazione 5.1.6.** Il lemma precedente non è vero per $p = +\infty$.

Infatti, se per $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ esistesse $(u_n) \subset C_0^0(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} u \quad \text{in } L^\infty(\mathbb{R}^N) ,$$

essendo la convergenza uniforme, $u$ sarebbe necessariamente continua. Ciò dovrebbe valere anche per $u = \chi_E$, con $E$ insieme misurabile, che è discontinua; il che è assurdo. $\square$

La nozione di supporto per una funzione continua $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è, come già visto, la chiusura dell'insieme $\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}$, ovvero $supp\, u$ è il complementare del più grande aperto in cui $u = 0$.
Tale nozione non è adeguata quando si ha a che fare con classi di equivalenza (come nel caso degli spazi $L^p(\Omega)$): osserviamo, e.g., che l'usuale nozione non ha senso per la funzione di Dirichlet $\chi_{\mathbf{Q}}$ definita su $\mathbb{R}$.
Pertanto diamo la seguente definizione (che coincide con quella nota nel caso delle funzioni continue).

**Definizione 5.1.7.** Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una qualunque funzione. Definiamo $supp\, u$ il complementare del più grande aperto in cui $u = 0$ q.o. in $\Omega$.

Questa definizione è "intrinseca" (se $u_1 = u_2$ q.o. in $\Omega$ allora supp $u_1$= supp $u_2$), e quindi possiamo parlare di $supp\, u$ per $u \in L^p(\Omega)$, senza precisare quale rappresentante scegliamo nella classe di equivalenza.
Osserviamo che $supp\, \chi_{\mathbf{Q}} = \emptyset$.

**Teorema 5.1.8.** *(Prodotto di convoluzione)*
*Siano* $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \le p \le +\infty$, *allora per q.o.* $x \in \mathbb{R}^N$ *la funzione*

$$y \mapsto u(x-y) \cdot v(y)$$

*è integrabile in* $\mathbb{R}^N$.
*Posto*

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y) \cdot v(y)\, d\mathcal{L}^N(y)$$

*(prodotto di convoluzione di $u$ per $v$)*

*si ha*

$$u * v \in L^p(\mathbb{R}^N)$$

*e vale la disuguaglianza di Young*

$$\|u * v\|_p \le \|u\|_1 \cdot \|v\|_p \,. \tag{5.1}$$

**Osservazione 5.1.9.** Osserviamo che il prodotto di convoluzione è commutativo; inoltre si ha [15]

$$supp\,(u * v) \subseteq \overline{(supp\, u) + (supp\, v)}\,.$$

Notiamo inoltre che se le funzioni $u$ e $v$ hanno entrambe supporto compatto, allora anche $u * v$ è a supporto compatto.

[15] **Definizione.** *Se $A$ e $B$ sono due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ poniamo*

$$A + B := \left\{ z \in \mathbb{R}^N ;\ \exists\, a \in A,\ b \in B \ : \quad z = a + b \right\}.$$

Chiaramente $A + B = B + A$.

- Se $A$ e $B$ sono entrambi chiusi, la somma $A + B$ può non essere un insieme chiuso.
- Se $A$ è un chiuso e $B$ è un compatto, la somma $A + B$ è un insieme chiuso.
- Siccome la somma di due insiemi limitati è limitata, dal risultato di chiusura segue che la somma di due compatti è ancora un compatto.
- Se $A$ è un chiuso e $r > 0$ vale la formula

$$A + \overline{B}_r(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N ;\ d(x, A) \le r \right\}.$$

Siano

$$A = \bigcup_{n \ge 2} \left[ -n, -n + \frac{1}{n^2} \right]$$

$$B = \bigcup_{n \ge 2} \left[ n + \frac{1}{n^2}, n + \frac{2}{n^2} \right] ;$$

allora

$$\chi_A, \chi_B \in L^1(\mathbb{R}) \qquad \text{e} \qquad 0 \notin supp\, \chi_A + supp\, \chi_B = A + B$$

**Teorema 5.1.10.** *Se* $u \in C_0^k(\mathbb{R}^N)$ *e* [16] $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *allora*

$$u * v \in C^k(\mathbb{R}^N) \quad \wedge \quad D^\alpha(u * v) = (D^\alpha u) * v \quad \forall\, |\alpha| \le k.$$

*In particolare se* $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ *e* $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *allora*

$$u * v \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \wedge \quad D^\alpha(u * v) = (D^\alpha u) * v \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^N.$$

A complemento del teorema di regolarità del prodotto di convoluzione (teorema 5.1.10) richiamiamo i seguenti risultati.

**Teorema 5.1.11.**

*(i) Se* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \le p \le +\infty)$ *e* $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ [17]*, allora*

$$f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \qquad e \qquad D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g \quad \forall\, \alpha \in N_0^N\ ;$$

*(ii) se* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *e* $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$*, allora* $f * g \in C^0(\mathbb{R}^N)$ .

(infatti $\forall\, a \in A \quad \exists\, n \ge 2\ :\ a \in \left[-n, -n + \frac{1}{n^2}\right]$; se $b = -a$, allora $b \in \left[n - \frac{1}{n^2}, n\right]$ e quindi $b$ non può appartenere a $B$). Posto $a_n = \frac{3}{2n^2}$ si ha

$$\left(\chi_A * \chi_B\right)(a_n) = \int_{\mathbb{R}} \chi_A\,(a_n - y) \cdot \chi_B(y)\, d\mathcal{L}^1(y) = |\tau_{a_n}(-A) \cap B| \ge \frac{1}{2n^2} > 0$$

dove $\tau_{a_n}(-A) = a_n - A$, perché

$$\tau_{a_n}(-A) \cap B \supseteq \underbrace{\left[a_n + n - \frac{1}{n^2}, a_n + n\right] \cap \left[n + \frac{1}{n^2}, n + \frac{2}{n^2}\right]}_{\text{la cui misura è } = \frac{1}{2n^2}}\ .$$

Dunque $\left(\chi_A * \chi_B\right)(a_n) > 0$ (si può provare che $\chi_A * \chi_B \in C^0(\mathbb{R})$) e quindi $0 \in supp\left(\chi_A * \chi_B\right)$. Pertanto, in generale, non è vero che

$$supp\,(u * v) \subseteq (supp\, u) + (supp\, v)\ .$$

cfr. anche e.g. [8], pp. 323-326.

[16] $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \iff \forall\, K$ compatto di $\mathbb{R}^N$ : $\quad v \in L^1(K)$.
[17] per la classe di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si veda il paragrafo 10.2

Illustreremo ora una *tecnica di regolarizzazione per convoluzione* introdotta da Leray e Friedrichs.

## 5.2 Successioni regolarizzanti

**Definizione 5.2.1.** Una successione di mollificatori (o successione regolarizzante) $(\varrho_n)$ è una qualunque successione di funzioni su $\mathbb{R}^N$ tali che

$$\varrho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \qquad supp\, \varrho_n = \overline{B}_{\frac{1}{n}}(0),$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varrho_n(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = 1, \qquad \varrho_n \geq 0 \quad \text{su } \mathbb{R}^N.$$

Nel seguito utilizzeremo sistematicamente la notazione $(\varrho_n)$ per indicare una successione di mollificatori costruita a partire dalla funzione $\varrho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ (introdotta in precedenza nel paragrafo 1.1), ponendo

$$\varrho_n(x) = \frac{n^N \varrho(nx)}{\int_{\mathbb{R}^N} \varrho(x)\, d\mathcal{L}^N(x)}\,.$$

## 5.3 Approssimazione dell'identità

**Teorema 5.3.1.** *(Teorema di approssimazione dell'identità)*
*Sia $(\varrho_n)$ una successione di mollificatori.*
*(i) se $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $u$ è uniformemente continua su $K$ compatto di $\mathbb{R}^N$, allora*

$$\varrho_n * u \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} u \quad \textit{sul compatto } K;$$

*(ii) se $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \lneqq +\infty$, allora*

$$\varrho_n * u \xrightarrow[n\to+\infty]{} u \quad \textit{in norma } L^p(\mathbb{R}^N).$$

*Inoltre*

$$\|\varrho_n * u\|_p \leq \|u\|_p \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

*Dimostrazione.* (i) La funzione $u|_K$ è uniformemente continua, quindi

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta_{K,\varepsilon} > 0 \quad : \quad |u(x-y) - u(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in K \quad \forall\, y \in \overline{B}_\delta(0).$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ risulta

$$\begin{aligned}(\varrho_n * u)(x) - u(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)\varrho_n(y)\, d\mathcal{L}^N(y) - u(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)\varrho_n(y)\, d\mathcal{L}^N(y) - \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\varrho_n(y)\, d\mathcal{L}^N(y)\\ &= \int_{\overline{B}_{\frac{1}{n}}(0)} [u(x-y) - u(x)]\, \varrho_n(y)\, d\mathcal{L}^N(y).\end{aligned}$$

Pertanto per ogni $x \in K$ e per ogni $n > \frac{1}{\delta}$ si ha

$$\begin{aligned} |(\varrho_n * u)(x) - u(x)| &\leq \int_{\overline{B}_{\frac{1}{n}}(0)} |u(x-y) - u(x)|\, \varrho_n(y)\, d\mathcal{L}^N(y) \\ &\leq \int_{\overline{B}_\delta(0)} |u(x-y) - u(x)|\, \varrho_n(y)\, d\mathcal{L}^N(y) \\ &< \varepsilon \cdot \int_{\overline{B}_\delta(0)} \varrho_n(y)\, d\mathcal{L}^N(y) = \varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) Sia $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \lneqq +\infty$; per quanto già provato in un lemma precedente $\left(\overline{C_0^0(\mathbb{R}^N)} = L^p(\mathbb{R}^N)\,,\ 1 \leq p \lneqq +\infty\right)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $u_1 \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\|u - u_1\|_p < \varepsilon.$$

Per il punto (i) $\varrho_n * u_1 \rightrightarrows u_1$ su ogni compatto contenuto nel $supp\, u_1$, e quindi, osservato che

$$supp\,(\varrho_n * u_1) \subseteq \overline{supp\, \varrho_n + supp\, u_1} = \overline{B}_{\frac{1}{n}}(0) + supp\, u_1 \subset \overline{B}_1(0) + supp\, u_1$$

(che è un determinato compatto) passando al limite sotto il segno di integrale risulta

$$\|(\varrho_n * u_1) - u_1\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\,.$$

Poiché

$$(\varrho_n * u) - u = [\varrho_n * (u - u_1)] + [\varrho_n * u_1 - u_1] + [u_1 - u]$$

si ha

$$\begin{aligned} \|(\varrho_n * u) - u\|_p &\leq \|\varrho_n * (u - u_1)\|_p + \|(\varrho_n * u_1) - u_1\|_p + \|u_1 - u\|_p \\ &\leq \|\varrho_n\|_1 \cdot \|u - u_1\|_p + \|(\varrho_n * u_1) - u_1\|_p + \|u_1 - u\|_p \\ &= 2\,\|u - u_1\|_p + \|(\varrho_n * u_1) - u_1\|_p\,. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\limsup_{n \to +\infty} \|(\varrho_n * u) - u\|_p \leq 2\varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

da cui la tesi.

□

Al teorema precedente si può dare anche la seguente versione (più generale) (cfr. e.g. [7], Th.(0.13)) :

**Teorema 5.3.2.** *Sia $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = a$. Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N} \cdot \varphi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$.*

*(i) Se $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $u$ è uniformemente continua su $K$ compatto di $\mathbb{R}^N$, allora*

$$\varphi_\varepsilon * u \underset{\varepsilon \to 0^+}{\rightrightarrows} au \qquad \textit{sul compatto } K\,.$$

*(ii) Se $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \lneqq +\infty$, allora*

$$\varphi_\varepsilon * u \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} au \qquad \textit{in norma } L^p(\mathbb{R}^N)\,.$$

## 5.4 Densità di $C_0^\infty(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p \lneqq +\infty)$

**Teorema 5.4.1.** *(Teorema di densità)*
*Sia $\Omega$ aperto connesso di $\mathbb{R}^N$. Lo spazio $C_0^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$ per ogni $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \lneqq +\infty$.*

Osserviamo che il teorema di densità può esprimersi con una delle seguenti formulazioni:

$$\forall\, u \in L^p(\Omega) \quad 1 \leq p \lneqq +\infty, \quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, u_1 \in C_0^\infty(\Omega) \quad : \quad \|u - u_1\|_p < \varepsilon$$

oppure

$$\forall\, u \in L^p(\Omega) \quad 1 \leq p \lneqq +\infty, \quad \exists\, (u_n) \subset C_0^\infty(\Omega) \quad : \quad \|u_n - u\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\,.$$

*Dimostrazione.* Data $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \lneqq +\infty$, sia

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega \\ \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Risulta $\overline{u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Essendo $\Omega$ aperto, esiste una successione crescente di compatti $K_n$ tale che

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\,.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$v_n = \overline{u} \cdot \chi_{K_n}\,.$$

Si ha

$$v_n \in L^p(\mathbb{R}^N), \qquad supp\, v_n = K_n, \qquad |v_n|^p \leq |\overline{u}|^p\,,$$

e

$$v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \overline{u} \quad \text{q.o. in } \mathbb{R}^N\,;$$

allora, per il teorema della convergenza dominata,

$$\|v_n - \overline{u}\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Posto, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \varrho_n * v_n$$

si ha $u_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$; d'altra parte

$$supp\,(\varrho_n * v_n) \subseteq \overline{supp\,\varrho_n + supp\,v_n} = \overline{B}_{\frac{1}{n}}(0) + K_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^N; \quad d(x, K_n) \leq \frac{1}{n} \right\} \subset \Omega$$

per $n$ sufficientemente grande.
Pertanto, per $n$ sufficientemente grande

$$u_n \in C_0^\infty(\Omega).$$

Ora
$$\begin{aligned}\|u_n - u\|_p &= \|u_n - \overline{u}\|_p = \|(\varrho_n * v_n) - \overline{u}\|_p \\ &= \|(\varrho_n * v_n) - (\varrho_n * \overline{u}) + (\varrho_n * \overline{u}) - \overline{u}\|_p \\ &\leq \|(\varrho_n * v_n) - (\varrho_n * \overline{u})\|_p + \|(\varrho_n * \overline{u}) - \overline{u}\|_p \\ &= \|\varrho_n * (v_n - \overline{u})\|_p + \|(\varrho_n * \overline{u}) - \overline{u}\|_p \\ &\leq \|\varrho_n\|_1 \cdot \|v_n - \overline{u}\|_p + \|(\varrho_n * \overline{u}) - \overline{u}\|_p\end{aligned}$$
(si è applicata la disuguaglianza di Young).
Pertanto, poiché
$$\|v_n - \overline{u}\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
e (per (ii) del teorema di approssimazione dell'identità)
$$\|(\varrho_n * \overline{u}) - \overline{u}\|_p$$
segue che
$$\|u_n - u\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.$$
Si è quindi provato che data $u \in L^p(\Omega)$ esiste $(u_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ tale che
$$\|u_n - u\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.$$

□

**Osservazione 5.4.2.** Sia $\Omega$ aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ e sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tale che
$$\int_\Omega u(x)\cdot\varphi(x)\,d\mathcal{L}^N(x) = 0 \quad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$
Allora
$$\int_\Omega u(x)\cdot v(x)\,d\mathcal{L}^N(x) = 0$$
per ogni $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ a supporto compatto contenuto in $\Omega$.

*Dimostrazione.* Sia $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ a supporto compatto $K$ contenuto in $\Omega$ (quindi $v \in L^1(\mathbb{R}^N)$). Consideriamo
$$v_n = \varrho_n * v \in C^\infty(\mathbb{R}^N).$$
Poiché
$$\mathit{supp}\, v_n \subset \overline{B}_{\frac{1}{n}}(0) + K \subset \Omega$$
per $n$ sufficientemente grande, risulta per gli stessi $n$
$$v_n \in C_0^\infty(\Omega)\,;$$
inoltre, poiché per il punto (ii) del teorema di approssimazione dell'identità
$$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} v \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^N)\,,$$

esiste un'estratta di $(v_n)$, $(v_{k_n})$, tale che

$$v_{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} v \quad \text{q.o. in } \mathbb{R}^N .$$

Inoltre dalla disuguaglianza di Young risulta

$$\|v_n\|_\infty \leq \|v\|_\infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N} .$$

Dall'ipotesi si ha, per $n$ sufficientemente grande

$$\int_\Omega u(x) \cdot v_{k_n}(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = 0 ,$$

e passando al limite sotto il segno di integrale (per il teorema della convergenza dominata) si ha

$$\int_\Omega u(x) \cdot v(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = 0. \quad \square$$

**Corollario 5.4.3.** *Se* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega u(x) \cdot \varphi(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

*allora*

$$u = 0 \quad \textit{q.o. in}\, \Omega.$$

*Dimostrazione.* Osservato che $\Omega$ è unione numerabile di compatti, la tesi si riduce a provare che fissato un arbitrario compatto $K \subset \Omega$ si ha $u = 0$ q.o. in $K$. Definiamo

$$v(x) = \begin{cases} \text{segno } u(x) & \text{se } x \in K \\ \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus K \end{cases}$$

dove

$$\text{segno } u(x) = \begin{cases} \ \ 1 & \text{se } u(x) > 0 \\ \ \ 0 & \text{se } u(x) = 0 \\ -1 & \text{se } u(x) < 0 . \end{cases}$$

Si ha che $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ed ha supporto compatto $K \subset \Omega$. Per l'ipotesi e l'osservazione precedente si ha

$$0 = \int_K u(x) \cdot v(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = \int_K |u(x)|\, d\mathcal{L}^N(x)$$

e quindi $u = 0$ q.o. in $K$. $\square$

In particolare vale il seguente risultato (di du Bois-Reymond):

**Corollario 5.4.4.** *Se* $u \in L^1([a,b])$ *e*

$$\int_a^b u(x)\,\varphi^*(x)\,d\mathcal{L}^1(x) = 0 \qquad \forall\,\varphi^* \in C_0^\infty([a,b])$$

*tale che*

$$\int_a^b \varphi^*(x)\,d\mathcal{L}^1(x) = 0 \qquad \textit{(i.e. } \varphi^* \textit{ ha media nulla),}$$

*allora*

$$u = costante \qquad \textit{q.o. in } [a,b].$$

*Dimostrazione.* Sia $\varphi_1 \in C_0^\infty([a,b])$ con $\int_a^b \varphi_1(x)\,d\mathcal{L}^1(x) = 1$.
Allora se $\varphi$ è una qualunque funzione di classe $C_0^\infty([a,b])$, la funzione

$$\varphi^*(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x)\int_a^b \varphi(y)\,d\mathcal{L}^1(y) \in C_0^\infty([a,b])$$

e $\int_a^b \varphi^*(x)\,d\mathcal{L}^1(x) = 0$.
Si riconosce facilmente che per l'ipotesi risulta

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b u(x)\,\varphi^*(x)\,d\mathcal{L}^1(x) \\
&= \int_a^b u(x)\,\varphi(x)\,d\mathcal{L}^1(x) - \int_a^b u(x)\,\varphi_1(x)\,d\mathcal{L}^1(x)\cdot\int_a^b \varphi(y)\,d\mathcal{L}^1(y) \\
&= \int_a^b u(x)\,\varphi(x)\,d\mathcal{L}^1(x) - \int_a^b u(y)\,\varphi_1(y)\,d\mathcal{L}^1(y)\cdot\int_a^b \varphi(x)\,d\mathcal{L}^1(x) \\
&= \int_a^b \Big[u(x) - \underbrace{\int_a^b u(y)\,\varphi_1(y)\,d\mathcal{L}^1(y)}_{=\,\text{cost}}\Big]\,\varphi(x)\,d\mathcal{L}^1(x)\,,
\end{aligned}$$

con $\varphi$ arbitraria funzione di classe $C_0^\infty([a,b])$.
Per il corollario precedente segue la tesi. □

## 5.5 Prodotto di convoluzione di due distribuzioni

Estendiamo [18] alle distribuzioni il concetto di prodotto di convoluzione, introdotto nel Teorema 5.1.8. Premettiamo la definizione di supporto di una distribuzione che estende quella nota per funzioni (cfr. Definizione 5.1.7).

[18] Cfr. e.g. [14].

**Definizione 5.5.1.** *(Supporto di una distribuzione)*
Si dice che una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è uguale a $0$ in un aperto $\Omega' \subset \Omega$ se risulta $\langle T, \varphi \rangle = 0$ per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$.
Il supporto di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è il complementare (relativo a $\Omega$) del più grande aperto (contenuto in $\Omega$) in cui $T$ è uguale a $0$.

**Esempio.** Il supporto di $\delta$ è $\{0\}$.

**Osservazione 5.5.2.** Una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ a supporto compatto si può estendere dallo spazio delle funzioni *test* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ a tutto $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ ponendo, per ogni $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\langle T, \psi \rangle := \langle T, \phi\, \psi \rangle$$

con $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tale che $\phi \equiv 1$ su un aperto contenente $supp\ T$ (osserviamo che $\phi\, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$).
L'estensione così definita non dipende dalla particolare funzione $\phi$ scelta.

**Definizione 5.5.3.** *(Prodotto di convoluzione di una distribuzione per una funzione)*

Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Si definisce prodotto di convoluzione $T * f$ la funzione

$$(T * f)\,(x) := \langle T(y), f(x-y) \rangle \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N\,, \tag{5.2}$$

dove la notazione ha il significato che la distribuzione $T(y)$ agisce sulla variabile $y$ producendo una funzione della variabile $x$.

**Osservazione 5.5.4.** Se $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ allora, denotata con $T_u$ la distribuzione associata alla funzione $u$, risulta

$$T_u * f = u * f\,. \tag{5.3}$$

Infatti, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, si ha

$$(T_u * f)\,(x) = \langle T_u(y), f(x-y) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} u(y)\, f(x-y)\, d\mathcal{L}^N(y) = (u * f)\,(x)\,.$$

**Osservazione 5.5.5.** Risulta

$$\delta * f = f \qquad \forall\, f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\,. \tag{5.4}$$

Da (5.2) si ha

$$(\delta * f)\,(x) = \langle \delta(y), f(x-y) \rangle = f(x-0) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N\,.$$

**Osservazione 5.5.6.** Se la distribuzione $T$ è a supporto compatto allora per l'Osservazione 5.5.2 si può estendere il prodotto di convoluzione $T * f$ definito dalla (5.2) a $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

**Teorema 5.5.7.**

*(i) Se* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *e* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ *allora* $T * f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *e*

$$D^\alpha(T * f) = (D^\alpha T) * f = T * (D^\alpha f) \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^N\,; \tag{5.5}$$

*(ii) se* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *è una distribuzione a supporto compatto e* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *allora* $T * f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *e vale la proprietà (5.5) ;*

*(iii) se, inoltre,* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *è una distribuzione a supporto compatto e* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ *allora* $T * f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

**Definizione 5.5.8.** *(Prodotto di convoluzione di due distribuzioni)*
Siano $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ di cui almeno una a supporto compatto. Si definisce prodotto di convoluzione $T * S$ la distribuzione tale che

$$\langle\, T * S, \varphi\rangle = \langle T(x), \langle S(y), \varphi(x+y)\rangle\,\rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\,, \tag{5.6}$$

dove la notazione ha il significato che la distribuzione $S(y)$ agisce sulla variabile $y$ producendo una funzione della variabile $x$ a cui si applica la distribuzione $T(x)$.

Osserviamo che la definizione è ben posta in quanto

(a) se la distribuzione $S$ è a supporto compatto allora, per la (iii) del Teorema 5.5.7, la funzione $x \mapsto (S * \varphi)\,(x)$ è di classe $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, cioè è una funzione *test*;

(b) se la distribuzione $T$ è a supporto compatto, poiché per la (i) del Teorema 5.5.7 la funzione $T * f$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^N)$, si considera l'estensione di $T$ allo spazio $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (Osservazione 5.5.2 e Osservazione 5.5.6).

**Osservazione 5.5.9.** In particolare, se $u, v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e almeno una di esse è a supporto compatto risulta

$$\langle T_u * T_v, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\, v(y)\, \varphi(x+y)\, d\mathcal{L}^N(x)\, d\mathcal{L}^N(y) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\,.$$

**Osservazione 5.5.10.** Siano $u, v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, con $u$ a supporto compatto e $v$ limitata. Vale la seguente proprietà[19]

$$T_{u*v} = T_u * T_v\,.$$

[19]Si osservi che $u * v \in C^0(\mathbb{R}^N)$ per la (ii) del Teorema 5.1.11 e quindi $u * v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$; inoltre la distribuzione $T_u$ è a supporto compatto e quindi ha senso considerare il prodotto di convoluzione $T_u * T_v$.

Infatti per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ risulta

$$\begin{aligned}
\langle T_{u*v}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} (u*v)(z)\,\varphi(z)\,d\mathcal{L}^N(z) = \int_{\mathbb{R}^N} (v*u)(z)\,\varphi(z)\,d\mathcal{L}^N(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left( \int_{\mathbb{R}^N} v(z-x)u(x)\,d\mathcal{L}^N(x) \right) \varphi(z)\,d\mathcal{L}^N(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \left( \int_{\mathbb{R}^N} v(z-x)\,\varphi(z)\,d\mathcal{L}^N(z) \right) d\mathcal{L}^N(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \left( \int_{\mathbb{R}^N} v(y)\,\varphi(x+y)\,d\mathcal{L}^N(y) \right) d\mathcal{L}^N(x) \\
&= \langle T_u * T_v, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è applicata l'Osservazione 5.5.9.

**Osservazione 5.5.11.** Dall'Osservazione 5.5.10 segue che la Definizione 5.5.8 estende in maniera naturale alle distribuzioni il prodotto di convoluzione tra funzioni (introdotto nel Teorema 5.1.8).
Inoltre il prodotto di convoluzione tra distribuzioni (definito nella Definizione 5.5.8) è anche una estensione della (5.2), in quanto, se $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, la distribuzione associata alla funzione $T_u * f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ definita dalla (5.2) risulta uguale alla distribuzione $T_u * T_f$ definita dalla (5.6).

Si ha, infatti, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (T_u * f)(x)\,\varphi(x)\,d\mathcal{L}^N(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} (T_u * f)(z)\,\varphi(z)\,d\mathcal{L}^N(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(z)\,d\mathcal{L}^N(z) \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\,f(z-x)\,d\mathcal{L}^N(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\,d\mathcal{L}^N(x) \int_{\mathbb{R}^N} f(z-x)\,\varphi(z)\,d\mathcal{L}^N(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\,d\mathcal{L}^N(x) \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\,\varphi(x+y)\,d\mathcal{L}^N(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\ \langle T_f(y), \varphi(x+y) \rangle\ d\mathcal{L}^N(x) \\
&= \langle T_u(x), \langle T_f(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle\ .
\end{aligned}$$

**Osservazione 5.5.12.** Si può provare che il prodotto di convoluzione tra due distribuzioni, di cui almeno una a supporto compatto, è commutativo.
Inoltre, il prodotto di convoluzione di due distribuzioni aventi entrambe supporto compatto è una distribuzione a supporto compatto.

**Osservazione 5.5.13.** Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Osservato che $\delta$ è una distribuzione a supporto compatto (essendo $supp\,\delta = \{0\}$) sono ben definiti i prodotti di convoluzione $T * \delta$ e $\delta * T$. Vale la seguente proprietà

$$T * \delta = \delta * T = T \tag{5.7}$$

e quindi la distribuzione $\delta$ rappresenta l'unità rispetto al prodotto di convoluzione.

Proviamo la (5.7). Risulta per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

$$\langle T * \delta, \varphi \rangle = \langle T(x), \langle \delta(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle T(x), \varphi(x+0) \rangle = \langle T(x), \varphi(x) \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

da cui segue che $T * \delta = T$.

**Osservazione 5.5.14.** Sussiste il seguente risultato: se $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e almeno una di esse è a supporto compatto si ha

$$D^\alpha (T * S) = (D^\alpha T) * S = T * (D^\alpha S) \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^N\,.$$